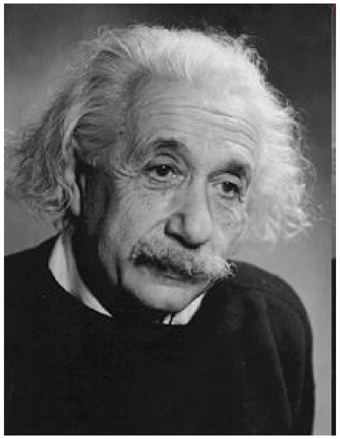
Física Moderna 01/2010

PARTE 1 - Mecânica Clássica relativística

1.1. As 3 leis de Newton e a relatividade de Newton.
1.2. O experimento de Michelson-Morley.
1.3. Os postulados da Teoria da Relatividade Especial.
1.4. As transformações de Lorentz: espaço e velocidade
 1.4.1. Dilatação do tempo;
 1.4.2. Conceito de simultaneidade;
 1.4.3. Contração do espaço.
1.5. Momentum relativístico.
1.6. Força em sistemas relativísticos.
1.7. Energia relativística.
1.8. Transformação de Lorentz de momentum-energia.
1.9. Efeito Doppler relativístico.



RELATIVIDADE ESPECIAL

Observa-se que as ondas eletromagnéticas (OE) se propagam no vácuo com a velocidade de $c \approx 3.00 \times 10^8$ m/s, onde c é uma constante universal (não depende do comprimento de onda) – VELOCIDADE DA LUZ.

Vamos ver que a radiação eletromagnética é quantizada, por exemplo, quando analisarmos o efeito fotoelétrico. As OE's têm um comportamento de partícula – são **fótons**. A energia de um fóton individual é diretamente proporcional a freqüência da onda, mas todos os fótons têm a mesma velocidade c quando se movem no vácuo, independentes de suas energias.

A velocidade **v** de qualquer objeto macroscópico de massa **m** encontrado na terra é $v << c$!!!!!

✱Definição clássica de **momentum**, $p = mv$

e **energia cinética** $E_k = 1/2mv^2 = p^2/2m$

estabelecidas empiricamente como quantidades que são conservadas em qualquer colisão.

✱Quando a partícula tem v comparável à **c** ➡ **p** e E_k não são mais quantidades que se conservam em colisões de partículas.

✱Vamos precisar de uma descrição revisada para partículas com altas velocidades e energias cinéticas – teoria da relatividade especial.

FUNDAMENTOS DA RELATIVIDADE ESPECIAL: POSTULADOS

A teoria da relatividade especial foi formulada por **Einstein 1905** (mesmo ano de publicação de seus famosos ***papers*** sobre o movimento Browniano e o efeito fotoelétrico).

1. As leis da física são idênticas em qualquer sistema de referência inercial.

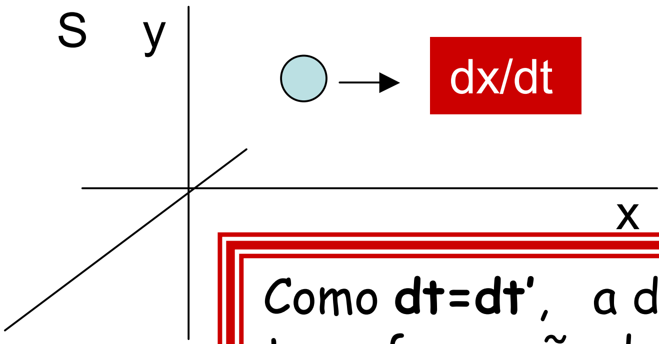
Este postulado é idêntico ao usado por Newton em sua formulação das leis da física clássica. A definição de um sistema inercial é um sistema de referência no qual a partícula não tem aceleração a menos que alguma força esteja atuando sobre a partícula.

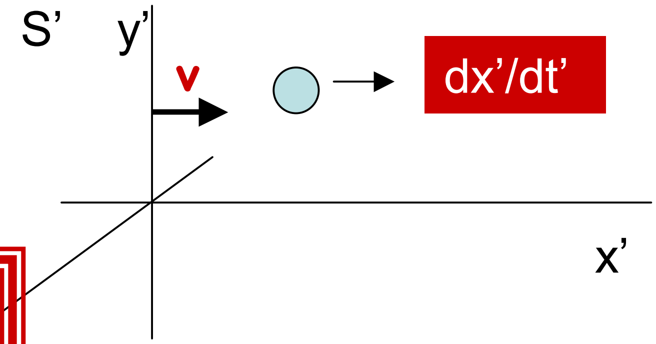
2. A velocidade da radiação eletromagnética no vácuo é constante, independente de qualquer movimento da fonte

Este postulado pode parecer contra-intuitivo; ele é baseado em nossa experiência comum a baixas velocidades, $\mathbf{v \ll c}$, na qual as velocidades se somam linearmente. Considere uma partícula que se move c/ veloc. $(\mathbf{dx/dt})$ na direção $\mathbf{x}$ num referencial que se move com uma velocidade v na direção x, as coordenadas são:

$t' = t \qquad x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z$

Transformação de GALILEO (TG)





Como **dt=dt'**, a diferenciação da transformação da coordenada x, com respeito a t nos fornece a lei de adição da velocidade:

$$dx'/dt = dx/dt - v$$

Por ex.: um vento frontal de velocidade **v**, decresce a velocidade de um avião com respeito a superfície da terra por uma quantidade **v**.

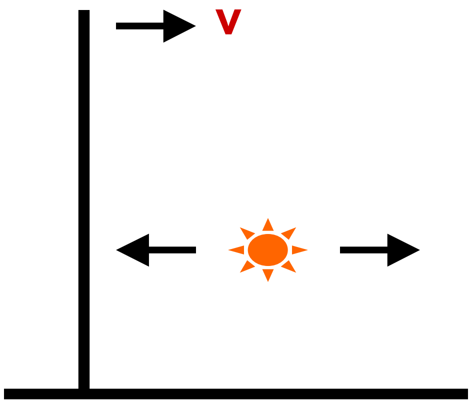
A TG funciona desde que as v's dos objetos sejam pequenas comparadas com a velocidade da luz. Ela não funciona para grandes velocidades. Vamos ter que desenvolver uma intuição relativística física.

Considere uma fonte de luz em repouso.

➡A luz emitida por esta fonte se propaga com **c**.

Agora considere um referencial que se move com velocidade **v** na direção **x**.

➡ Neste referencial a fonte de luz tem uma velocidade **v**. A TG prevê que a velocidade da luz que se move no sentido dos x negativos, no referencial que se move seja de **v+c**.



Isso não e verdade: a velocidade da luz no referencial que se move não se altera - é igual a **c**, mesmo que a velocidade do sistema de referencia seja muito grande!

O EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

Como as ondas sonoras precisam de um meio para se propagar, era natural imaginar que as OE deveriam também precisar de um meio para a propagação. O meio hipotético foi chamado de **éter.**

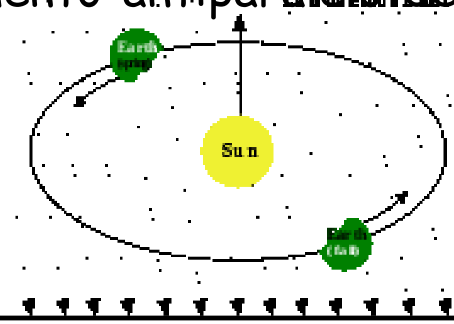
Albert Michelson propôs um experimento em 1881 que era sensível a possível presença do éter (repetido por **Michelson & Edward Morley** com uma precisão muito maior em 1887).

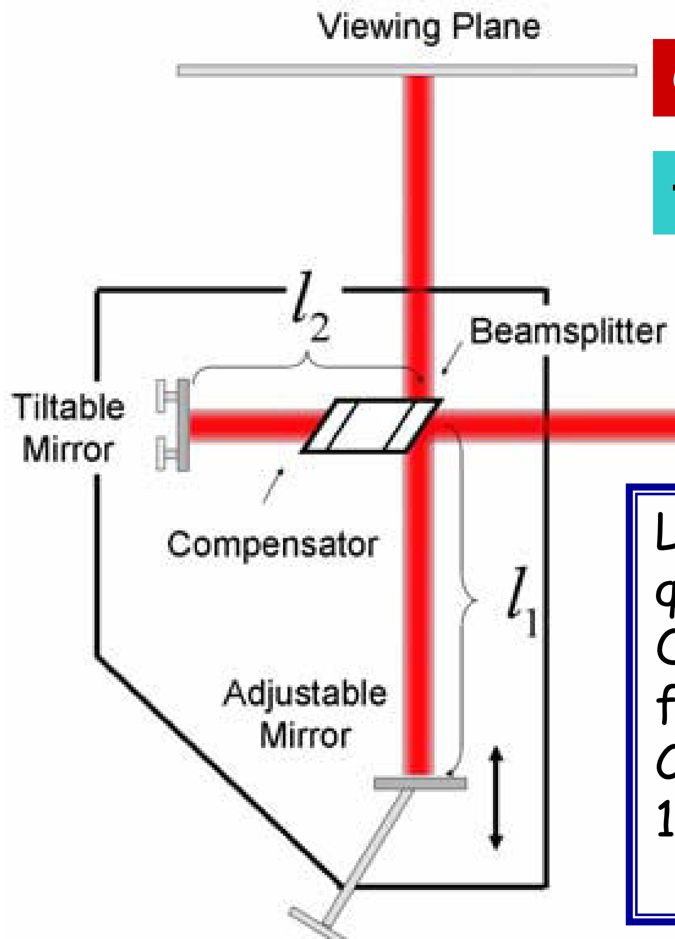
Se a propagação das ondas de luz dependesse do éter, então o movimento em relação ao éter teria necessariamente um efeito na velocidade da luz. A procura pela existência do éter é equivalente a testar o segundo postulado da relatividade especial. O objetivo era ver se o movimento da terra em sua órbita afetava ou não a velocidade da luz.

A velocidade orbital da Terra (em torno do Sol) é de $3 \times 10^4 m/s$:

$$v/c = 3 \times 10^4 / 3 \times 10^8 = 10^{-4}.$$

Se a TG estivesse certa, então a velocidade da luz de uma fonte que fosse diretamente paralela ao movimento da terra, deveria ser **incrementada** de um dez milésimos, enquanto que a que tivesse um movimento antiparalelo deveria ser **reduzida** da mesma quantidade.





O EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

$$t_1 = L_1/(c+v) + L_1/(c-v)$$

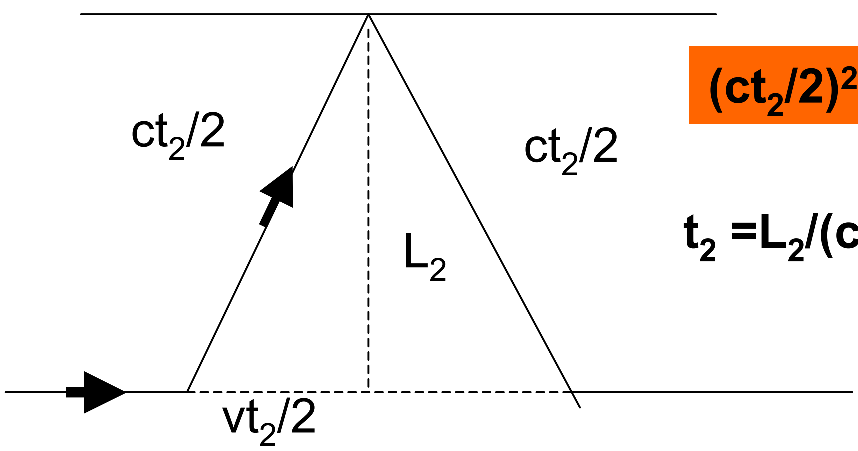
Luz é emitida de uma fonte e incide sobre espelhos que são parcialmente transmissores.
O espelho divide a luz em dois feixes que viajam formado ângulo reto entre um e outro.
Cada feixe percorre uma distância de mais ou menos 1 m e é refletido por um espelho. Após múltiplas reflexões os feixes se encontram.

Suponha por um momento que as distâncias percorridas pelos dois feixes sejam exatamente as mesmas. De acordo com a **TR**, os feixes chegam precisamente no mesmo tempo.
Se a **TG** fosse válida, a velocidade da luz não seria constante ao longo dos dois caminhos devido **ao movimento da Terra**, e os dois feixes não chegariam no mesmo instante. Na prática os 2 caminhos percorridos não podem ser idênticos o que significa que deveria haver um **padrão de interferência** devido a esta diferença de caminho óptico.

A luz dos dois caminhos chega fora de fase ➡O experimento procura por uma mudança deste padrão de interferência quando se aplica uma rotação (a rotação provoca uma mudança na direção do caminho dos feixes de luz, com respeito à direção de movimento da Terra).
De acordo com a TER a velocidade dos feixes de luz permanece constante e o padrão de interferência não se altera com a rotação de 90 graus do aparato.
➡vamos então analisar o experimento usando a soma de velocidades prevista pela TG: considere o caso no qual o feixe se move paralelo e antiparalelo ao movimento da Terra.
O tempo t_1 para se alcançar o interferômetro é:

$$t_1 = L_1/(c+v) + L_1/(c-v) = 2L_1/c(1-v^2/c^2)$$

No caso em que o feixe se move **perpendicular** ao movimento da Terra, o tempo t_2 para se alcançar o interferômetro é:



$$(ct_2/2)^2 = L_2^2 + (vt_2/2)^2$$

$$t_2 = L_2/(c^2-v^2)^{1/2} + L_2/(c^2-v^2)^{1/2} = (2L_2/c)\ 1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$$

Desta forma, a diferença de tempo de trânsito nos dois percursos é dada por:

$$\Delta t = (t_2-t_1) = 2/c\ [L_2/(1-v^2/c^2)^{1/2} - L_1/(1-v^2/c^2)]$$

Supondo agora que todo o aparelho tenha sido rodado de 90º , vemos que o percurso L_2 troca de lugar com o percurso L_1 e portanto, a nova diferença de tempo será dada por:

$$\Delta t' = (t'_2-t'_1) = 2/c\ [L_2/(1-v^2/c^2) - L_1/(1-v^2/c^2)^{1/2}]$$

Desta forma a rotação muda as diferenças entre os intervalos de tempo pela quantidade: $\Delta t' - \Delta t = 2/c\ [(L_1+L_2) / (1-v^2/c^2) - (L_1+L_2)/(1- v^2/c_2)^{1/2}]$

Podemos agora usar o desenvolvimento binomial $(1+x)^n \approx 1+nx$, para x pequeno o que nos dá:

$$1/(1- v^2/c^2) \approx 1 + v^2/c^2 \qquad e \qquad 1/(1-v^2/c^2)^{1/2} \approx 1 + v^2/2c^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t' - \Delta t = v^2/c^2\ [L_1+L_2)]/c}$$

Previsão: deslocamento nas franjas interferência sobre o anteparo: **claro/escuro**

Este deslocamento ΔN será dado pela razão entre as diferenças de tempo e o período das ondas (temos que lembrar que como os feixes partem da mesma fonte, o período e a freqüência são iguais para ambos os feixes).
Logo, o deslocamento das franjas Γ=**periodo**

$[\Delta t' - \Delta t]/\Gamma = \Delta N = v^2/c^2\,[L_1+L_2)]/c\Gamma$ $c\Gamma = \lambda$ comp. de onda da radiação.

No experimento de Michelson – Morley:
$L_1=L_2=L=11m$, $\lambda = 5{,}5 \times 10^{-7}$ m e $v/c = 10^{-4}$,
com isso era esperado um desvio: **0.4 franjas.**

Ou seja, este era o deslocamento de franjas que deveria ser observado caso houvesse alguma diferença na velocidade da luz medida nos dois referenciais, na Terra e no éter (se os feixes de luz tivessem viajado a velocidades diferentes por causa do movimento da terra).

NENHUMA MUDANÇA FOI OBSERVADA ➨ **A velocidade da luz é uma constante absoluta e não existe nenhum éter**
OE's podem se propagar no vácuo

TRANSFORMACÃO DE LORENTZ - TL

A relação correta entre as coordenadas de um referencial estacionário **(t,x,y,z)** e as de um referencial que se move com velocidade constante **(t',x',y',z')** foi proposta por **Lorentz** em 1890.

Lorentz **PROPOS** uma transformação das coordenadas **espaço-tempo**, que deixava as equações de Maxwell inalteradas, frente a esta **TL**.

As equações de Maxwell **são invariantes** frente às **TL**, ou seja, as equações de Maxwell têm a mesma cara em todos os referenciais inerciais.

Isto é verdade para qualquer velocidade, mesmo para as grandes velocidades desde que **$v<c$**.

A **TL** relacionando as coordenadas dos 2 sistemas de referência tem as seguintes propriedades:

A T é uma função linear de x e t;

A T não altera as coordenadas y e z;

A T não altera a velocidade da onda de luz;

Fazendo uma segunda T com uma velocidade v na direção negativa dos x's, obtem-se novamente as coordenadas originais espaço-temporal;

Quando **$v<<c$**, a TL recai na TG.

A Transformação nas coordenadas espaço-tempo que satisfaz todos estes pré-requisitos pode ser escrita como:

$$t' = \gamma\,(t - xv/c^2)$$
$$x' = \gamma\,(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

onde $\gamma = 1/\left[(1 - v^2/c^2)^{1/2}\right]$ $\qquad \gamma > 1$

A forma da TL é uma conseqüência direta do fato de que a velocidade da luz é a mesma em todos os sistemas de referência. Podemos resolver as equações para t, x, y e z para obter a transformação inversa o que nos leva a expressões iguais com x e x' invertidos assim como o t e t', e com –v no lugar de v:

$$t = \gamma\,(t' + x'v/c^2)$$
$$x = \gamma\,(x' + vt')$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$ **com** γ **= fator de Lorentz**

EXEMPLO 4.1 : Mostre que se transformamos primeiro na direção x e depois na direção –x, com a mesma velocidade (v), acabamos com as coordenadas originais de espaço e tempo.

Einstein foi o primeiro a entender que os físicos deveriam abandonar o conceito confuso de éter. Ele aceitou a idéia de que a luz se propaga através do vácuo, que é realmente o vazio.

POSTULADO: As leis dos fenômenos EM e as leis da Mecânica são as mesmas em todos os referenciais inerciais mesmo quando estes referenciais se movem um em relacão ao outro.

Este postulado implica que ou se modificam as equaçoes de Maxwell ou as **TG**, já que as duas juntas negam o postulado

Simultaneidade

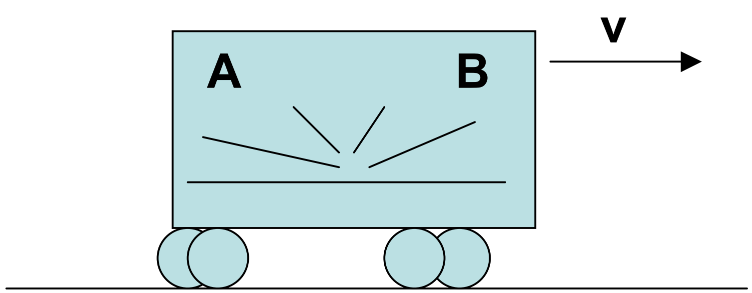
A 4ª TG diz que **t'=t**, ou seja, a escala temporal é a mesma em todos os lugares e em qualquer instante em qualquer dos 2 SRs

Definição de Einstein

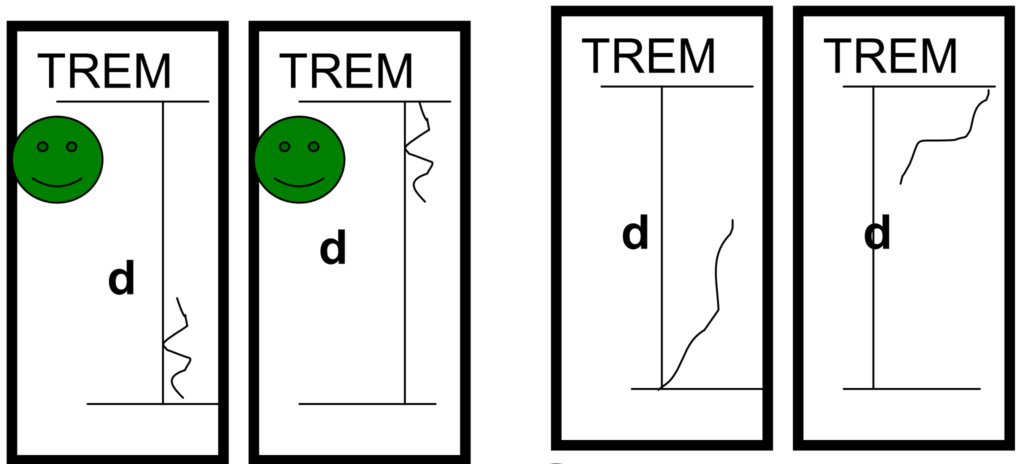
Um evento ocorrendo no tempo t_1 na posição x_1, é simultâneo com outro evento ocorrendo no tempo t_2 na posição x_2, se o sinal luminoso emitido em x_1 e o emitido em x_2 chegarem simultaneamente no ponto médio geométrico entre x_1 e x_2.

Consequência: 2 eventos que são simultâneos quando observados de um SR **NÃO SÃO** simultâneos quando observados de um segundo SR que se move em relação ao primeiro

Exemplos:



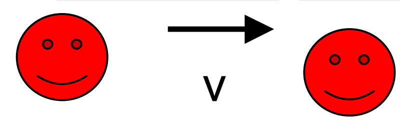
Para o SR do trem, a luz chega em A ao mesmo tempo que em B. Para o referencial Terra, a luz chega mais rápido em A do que em B pois a parede do trem (lado A) está se aprox. da frente luminosa



$\Delta t' = d/c$

Tempo próprio

observador em repouso no evento "dentro do trem"



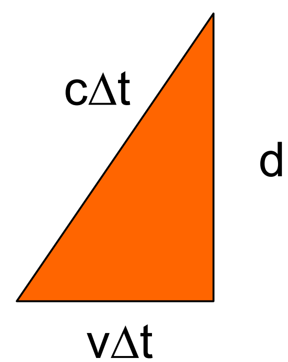
Referencial em movimento

Dilatacão Temporal

$$T = \gamma\, T_o$$

$$(c\Delta t)^2 = (v\Delta t)^2 + d^2$$
$$(\Delta t)^2\,[c^2 - v^2] = d^2$$
$$(\Delta t)^2 = d^2/c^2\; 1/(1-v^2/c^2)$$

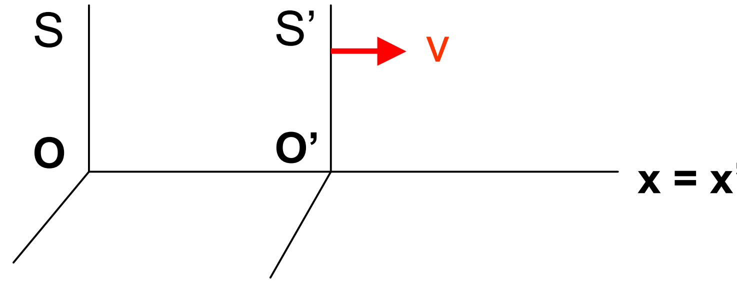
$$(\Delta t) = (\Delta t')\; 1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$$



Como $\gamma>1$ ➡ $(\Delta t) > (\Delta t')$ o tempo foi dilatado

no referencial no qual o observador esta parado

As Transformacões de Lorentz



Qdo t = t' = 0, O' produz uma emissão luminosa que se expande do ponto de emissão com velocidade c em todas as direcões

Entretanto,de acordo com O', no tempo t', a frente de onda será uma esfera centrada na sua origem com raio r'=ct'

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Mas será igualmente verdadeiro que de acordo com a origem O, a luz se expandirá do ponto de emissão, sua origem, com velocidade c em todas as direções.

Do ponto de vista de O, a frente de onda no tempo t é também uma esfera de raio ct centrada na sua própria origem e portanto satisfazendo a: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$

PONTO O': **S** $\quad x_{o'} = vt$

S' $\quad x'_{o'} = 0$

$x'_{o'} = a_3 x_{o'} + a_4 t$

$0 = a_3 (vt) + a_4 t$

➨ $-a_3 vt = a_4 t$ ➨ $-a_3 v = a_4$

PROPOSTA:

$t' = a_1 x + a_2 t$

$x' = a_3 x + a_4 t$

$y' = y$

$z' = z$

Logo: $t' = a_1 x + a_2 t$

$X' = a_3 x - a_3 vt = a_3 (x - vt)$

FAZER!!!!!!

A EQUAÇÃO DE ONDA

A descoberta da **TL** por Lorentz ocorreu quando analisava o comportamento dos campos B+E de uma carga em movimento com velocidade constante.
A **TL** foi identificada com a T das coordenadas espaço-tempo que não altera a forma das equações de Maxwell. Como a equação da OE está contida nas equações de Maxwell, a **TL** tb não altera a forma da equação de onda que é dada por:

$$\partial^2F/\partial x^2 + \partial^2F/\partial y^2 + \partial^2F/\partial z^2 = 1/c^2\ \partial^2F/\partial t^2$$

A TG não preserva a forma da equação de onda. Mediante a TG as derivadas espaciais ficam da seguinte forma:

$$x' = x - vt, \quad t' = t$$

$$\partial F/\partial x = \partial F/\partial x'\ \partial x'/\partial x + \partial F/\partial t'\ \partial t'/\partial x = \partial F/\partial x' \quad \text{ou}$$

$$\partial^2F/\partial x^2 = \partial^2F/\partial x'^2 \qquad \partial^2F/\partial y^2 = \partial^2F/\partial y'^2 \qquad \partial^2F/\partial z^2 = \partial^2F/\partial z'^2$$

As derivadas temporais ficam :

$$\partial F/\partial t = \partial F/\partial t'\ \partial t'/\partial t + \partial F/\partial x'\ \partial x'/\partial t = \partial F/\partial t' - v\partial F/\partial x'$$

$$\text{e} \quad \partial^2F/\partial t^2 = (\partial/\partial t' - v\partial F/\partial x')\ (\partial F/\partial t' - v\partial F/\partial x') = \partial^2F/\partial t'^2 - 2v\ \partial^2F/\partial x'\partial t' + v^2\partial^2F/\partial x'^2$$

Usando agora as derivadas a segunda na equação de onda no sistema de referência que se move temos,

$$\partial^2F/\partial x'^2 + \partial^2F/\partial y'^2 + \partial^2F/\partial z'^2 = 1/c^2\ \{\partial^2F/\partial t'^2 - 2\ v\ \partial^2F/\partial x'\partial t' + v^2\partial^2F/\partial x'^2\}$$

Claramente vemos que a forma da equação de onda se alterou. No limite de $v \rightarrow 0$,a forma é recuperada!

Já a **TL** preserva a forma da equação de onda: $[x' = \gamma\,(x-vt), \quad t' = \gamma\,(t-xv/c^2)\,]$

$$\partial F/\partial x = \partial F/\partial x' .\ \partial x'/\partial x + \partial F/\partial t' .\ \partial t'/\partial x = \gamma\, \partial F/\partial x' - \gamma\, v/c^2\, \partial F/\partial t'$$

$$\partial F/\partial t = \partial F/\partial t' .\ \partial t'/\partial t + \partial F/\partial x' .\ \partial x'/\partial t = \gamma\, \partial F/\partial t' - \gamma\, v\, \partial F/\partial x'$$

Logo, teremos:

$$\partial^2 F/\partial x^2 = (\gamma\, \partial/\partial x' - \gamma\, v/c^2\, \partial/\partial t')\,(\gamma\, \partial F/\partial x' - \gamma\, v/c^2\, \partial F/\partial t') =$$
$$\gamma^2\, \partial F^2/\partial x'^2 - \gamma^2 v/c^2\, \partial^2 F/\partial t' \partial x' + \gamma^2\, v^2/c^4\, \partial F^2/\partial t'^2$$

e

$$\partial^2 F/\partial t^2 = (\gamma\, \partial/\partial t' - \gamma v \partial/\partial x')\,(\gamma\, \partial F/\partial t' - \gamma v \partial F/\partial x')$$
$$= \gamma^2\, \partial F^2/\partial t'^2 - 2\, \gamma^2 v\, \partial^2 F/\partial t' \partial x' + \gamma^2\, v^2 \partial F^2/\partial x'^2$$

Desta forma obtemos que:

$$\gamma^2\, \partial F^2/\partial x'^2 - 2\, \gamma^2 v/c^2\, \partial^2 F/\partial t' \partial x' + \gamma^2\, v^2/c^4 \partial F^2/\partial t'^2 + \partial F^2/\partial y'^2 + \partial F^2/\partial z'^2$$
$$= \gamma^2\, /c^2\, \partial F^2/\partial t'^2 - 2\, \gamma^2 v/c^2\, \partial^2 F/\partial t' \partial x' + \gamma^2\, v^2/c^2\, \partial F^2/\partial x'^2$$

$$[\gamma^2 - \gamma^2\, v^2/c^2]\, \partial F^2/\partial x'^2 + \partial F^2/\partial y'^2 + \partial F^2/\partial z'^2 = [\gamma^2 - \gamma^2\, v^2/c^2\,]\, 1/c^2\, \partial F^2/\partial t'^2$$

ou

$$\partial F^2/\partial x'^2 + \partial F^2/\partial y'^2 + \partial F^2/\partial z'^2 = 1/c^2\, \partial F^2/\partial t'^2$$ DEMONSTRADO!

TRANSFORMAÇÃO DE VELOCIDADES

Uma propriedade importante da TL é que contem o fato experimental de que a velocidade da luz não depende do movimento da fonte.

Considere uma partícula num referencial S que se move com uma velocidade dx/dt na direção x. Num referencial S', definido como se movendo com uma velocidade v na direção x relativa ao referencial S, a mesma partícula tem uma velocidade dx'/dt'. A determinação de dx'/dt', em termos de dx/dt, é obtida a partir da TL por diferenciação das coordenadas.

Lembrando que:

$$x' = \gamma\,(x - vt)$$

$$t' = \gamma\,(t - xv/c^2)$$

$$dx'/dt' = [dx - v\,dt] \,/\, [dt - v/c^2\, dx]$$

$$= [dx/dt - v] \,/\, [1 - v/c^2\, dx/dt]$$

Casos limites:

➨ quando a velocidade relativa dos dois referenciais é pequena comparada com c ($v/c \approx 0$) temos:

➨ **$dx'/dt' \approx dx/dt - v$**

REGRA DA ADICAO DE VOLICIDADE DE GALILEO

"velocity addition rule"

➨se a partícula é um foton, então $dx/dt = c$

➨ **$dx'/dt' = [c - v] \,/\, [1 - v/c^2\, c] = c$**

a velocidade do fóton é inalterada!

2º postulado da relatividade especial

A TL contem esta física importante.
Um corolário do segundo postulado da relatividade é que nenhuma partícula pode se mover mais rápido do que a velocidade da luz c e nenhuma partícula foi até hoje observada com **$v > c$.**

➡ no limite de v se aproximando de c, **$dx'/dt' = [dx/dt - c] / [1 - c/c^2\, dx/dt]$**
$= -c$

Assim, num referencial que está se movendo com v próximo a v da luz, a velocidade da partícula se aproxima de c. Em nenhum caso é possível ter dx/dt, dx'/dt', ou v maior do que c.

Caso mais geral em que a partícula tem componentes de velocidade:

dx/dt, dy/dt e dz/dt

no referencial S.

No referencial S' a componente s da velocidade, **dx'/dt'**, é dada pela TL já que as coordenadas x' e t' não dependem de y e z.

Embora as coordenadas y' e z' permaneçam inalteradas, as velocidades **dy'/dt' e dz'/dt'** se alteram já que t' não é igual a t.

A TL nos fornece: **$dy'/dt' = dy / \gamma\, [dt - v/c^2\, dx] = dy/dt / \gamma\, [1 - v/c^2\, dx/dt]$.**

Vemos então que a componente da velocidade no sistema de referência que se move S', dy'/dt', depende de ambas as componentes das velocidades **dx/dt e dy/dt** do sistema estacionário S.

Analogamente,

$$dz'/dt' = dz/dt \,/\, \gamma\, [dt - v/c^2\, dx] = dz/dt \,/\, \gamma\, [1 - v/c^2\, dx/dt].$$

NOTA: Na maior parte das aplicações da relatividade especial a velocidade não é uma variável muito útil! A razão é que no regime extremo relativístico, as partículas se movem com v muito próximas a c. Não é muito fácil ver as diferenças físicas entre partículas que se movem com 0.99c e 0.999c, mas existe uma grande diferença.

Note que podemos escrever para as componentes das velocidades:

$dx'/dt' = u'_x$ $\quad dy'/dt' = u'_y$ $\quad dz'/dt' = u'_z$

$dx/dt = u_x$ $\quad dy/dt = u_y$ $\quad dz/dt = u_z$

$$u'^2 = [u_x^2 + v^2 - 2u_x v + u_y^2/\gamma^2 + u_z^2/\gamma 2]\ 1/[1 - v/c^2\, u_x)^2$$

$$u'^2 = [u^2/\gamma^2 + v^2 + u_x^2(1 - 1/\gamma^2) - 2u_x v]\ 1/[1 - v/c^2 u_x)^2$$

Relacão entre as velocidades nos dois SRs

EXEMPLO 4.2 : No Sistema de Referencia S, dois elétrons se aproximam um do outro, cada uml com velocidade v=c/2. Qual é a velocidade relativa dos dois elétrons?

A velocidade relativa dos dois elétrons é a velocidade de um dos elétrons no referencial no qual o outro est... com c/2 na direção negativa dos x. No S', um dos e's ... reção x. A velocidade deste elétron em S' é:

➡ dx/dt =c/2 v =-c/2

$$dx'/dt' = [dx/dt - v] / [1 - v/c^2\, dx/dt] = [c/2 - (-c/2)]/[1 - (-c/2c^2)(c/2)] = 4c/5$$

EXEMPLO 4.3 : No Sistema de Referencia S, um elétron tem velocidade c/2 na direção x e um fóton tem a velocidade c na direção y. Qual é a velocidade relativa do elétron e o fóton?

Do segundo postulado da relatividade sabemos responder sem fazer contas!!! A velocidade relativa entre eles deve ser c!!!! Vamos testar a partir das relações matemáticas elaboradas. Supomos para isso que S'se mova com veloc... po... referencial S' o elétron está em repouso. A do fóton e dada por

➡ v =c/2 dx/dt=0

$$\gamma = 1/[(1-v^2/c^2)^{1/2}] = 1/[(1-(c/2)^2/c^2)^{1/2}] = (4/3)^{1/2}$$

$$dy'/dt' = dy/dt / \gamma\, [1 - v/c^2\, dx/dt] = c / (4/3)^{1/2}[1 - (c/2)/c^2\,(0)] = (3)^{1/2}\, c/2$$

$$dx'/dt' = [dx/dt - v] / [1 - v/c^2\, dx/dt] = [0 - c/2]/[1 - (c/2)/c^2(0)] = - c/2$$

Como a componente z da velocidade do fóton e nula a velocidade do foton neste sistema de referência é:

$$[(dx'/dt)^2 + (dy'/dt')^2 + (dz'/dt')^2]^{1/2} = [c^2/4 + 3c^2/4 + 0]^{1/2} = c$$

DILATACÃO TEMPORAL

Considere um intervalo de tempo Δt medido numa posição fixa x_o, num referencial estacionário,

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Se usamos a TL para calcular o intervalo de tempo $\Delta t'$ medido num referencial que se move com velocidade v, obtemos:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 \ = \ \gamma\, [t_2 - x_o v/c^2) - \gamma\, [t_1 - x_o v/c^2) = \gamma\, [t_2 - t_1] = \gamma \Delta t$$

Conclusão: o intervalo de tempo é maior no referencial que se move em relacao ao evento! Este resultado é chamado de **dilatação temporal**!

➨Conseqüência direta do segundo postulado da relatividade especial. O intervalo de tempo medido num referencial no qual o relógio está em repouso ➨ **tempo próprio**

Fisicamente:

Considere o intervalo de tempo que leva a luz para viajar uma distância **d** do ponto A ao ponto B no referencial S.

O relógio neste caso é o aparato que detecta a luz. Temos: $\Delta t = d/c$.

Considere agora que vamos medir o intervalo de tempo do mesmo evento, luz viajando de A para B, mas considerando um referencial que se move (S'). O segundo postulado diz que a velocidade da luz é constante.

Analisando o diagrama das velocidades vemos que como a componente horizontal é v e que a velocidade final é c: $c^2 = v^2 + y^2$ $\quad y^2 = (c^2 - v^2)^{1/2}$

Logo : $\Delta t' = d/(c^2 - v^2)^{1/2} = \gamma d/c$ que é maior do que o tempo no referencial S

A diferença entre os dois referenciais é que o "relógio" é estacionário em S e se move em S'.

Existe sempre um **referencial especial** que é aquele no qual o **"relógio"** está em repouso. No caso de uma partícula que sofre um decaimento radioativo espontâneo, o relógio é a própria partícula e o tempo de vida da partícula é menor no referencial que a partícula está em repouso.

EXEMPLO 4.4: Um pion é criado numa colisão de partícula com uma velocidade grande de tal forma que $\gamma = 1/ [(1-v^2/c^2)^{1/2}] = 100$. Observa-se que o pion se desloca uma distância de 300 m antes de decair espontaneamente. Quanto tempo o pion vive no referencial em repouso?

Como $\gamma = 100$ então a velocidade do pion é muito próxima de c é

$$v/c = [1- 1/\gamma^2]^{1/2} = [1- 1/10^4]^{1/2} \approx 1$$

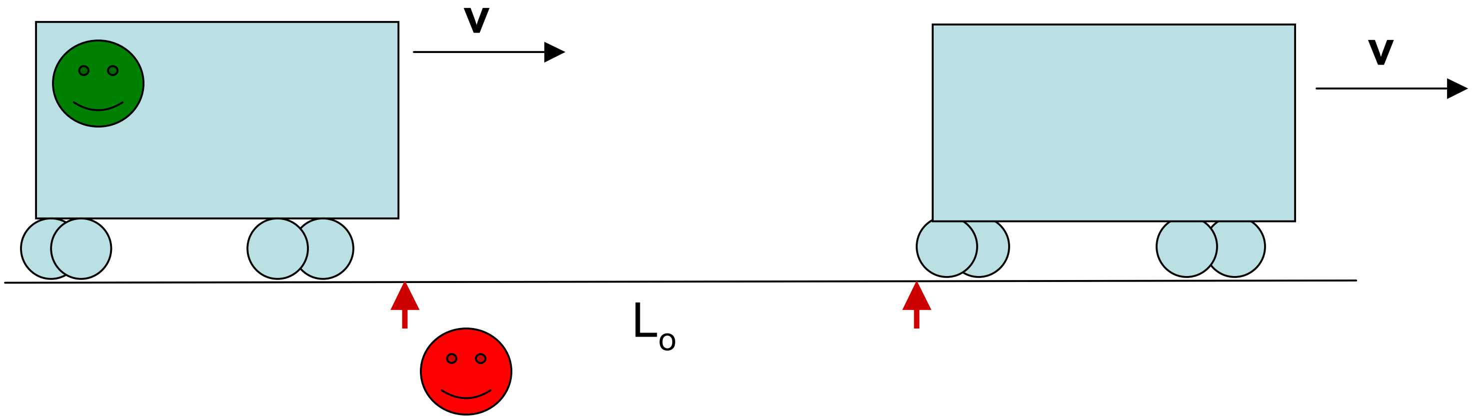
O tempo de vida no qual o pion viaja 300m é (tempo deilatado):

$$\Delta t' = d/v = 300m/ 3x10^8 m/s = 10^{-6}\ s$$

O tempo de vida no qual o pion está em repouso (TEMPO PROPRIO)

$$\Delta t = \Delta t'/ \gamma = 10^{-8}\ s$$

CONTRACÃO ESPACIAL



$L_o = v\Delta t_{verm}$ onde Δt_{verm}=tempo dilatado

e Δt_{verm}=tempo dilatado=$\gamma\ \Delta t_{verde}$

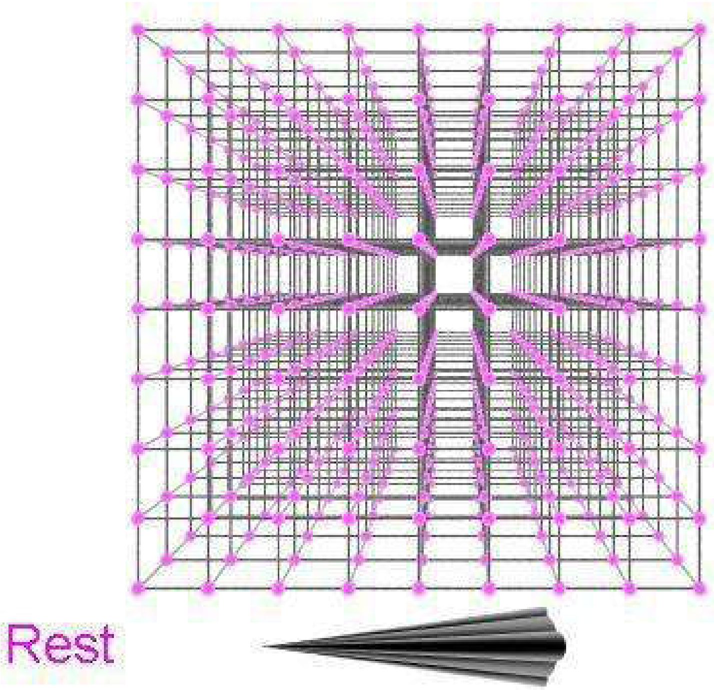
$L_{verde} = v\Delta t_{verde}$ onde Δt_{verde}=tempo próprio

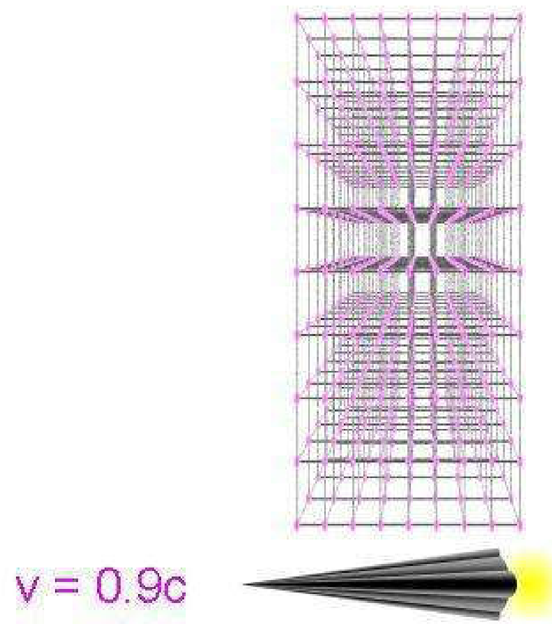
Conclusão: $L_{verde}/L_{verm} = v\ \Delta t_{verde}\ /v\ \Delta t_{verm} = \Delta t_{verde}/\Delta t_{verm}$

$= \Delta t_{vermelho}/\ \gamma\ \Delta t_{verm}$

$L_{\ verde} = L_o/\ \gamma$ **contração espacial**

Mede-se um L menor por um fator γ quando a medida é feita num referencial que se move na direcão paralela ao seu próprio comprimento





EXEMPLO: **Contração do comprimento** ocorre ao longo da direção do movimento. Note que a rede permanece tao grande e profunda como antes, mas encolhe mais do que a metade na direção do deslocamento.

Muons: Exemplo de dilatação temporal e contração espacial

Partículas instáveis criadas qdo raios cósmicos interagem com a atmosfera superior

Se movem com velocidades muito altas ($\beta \approx 0.9999$) e tem tempos de vida muito pequenos $\tau = 2 \times 10^{-6}$s

PERGUNTA: Será que os muon chegam a superfície dado que a camada de atmosfera é de 10Km?

RESPOSTA CLASSICA: distância = velocidade x tempo = 0.9999c x 2×10^{-6}s = 0.6 Km ➡ os muons **não chegam na Terra**

Mas, de fato, eles chegam!

O que está errado? Temos que considerar os efeitos relativísticos. A resposta clássica mistura os referenciais:

τ= se refere ao tempo de vida do muon no seu sistema de referência $\mathbf{t_o} = 2 \times 10^{-6}$s

Espessura da atmosfera de 10 Km – comp no referencial da Terra $\mathbf{L_o}$ = 10Km

(1) Dilatacão Temporal

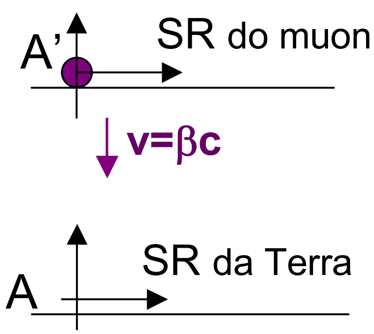
ocorre do referencial daTerra

No SR do muon:

t'=0 muons são criados

t'= τ muons são destruídos

Δ**t'=** τ



O tempo medido no SR da Terra em A:

$\Delta t = \gamma\, \Delta t' = \gamma\, \tau = 1.4 \times 10^{-4}$s

tempo 70 vezes maior

Distância = 0.9999c x1.4x10^{-4}s = 42 Km

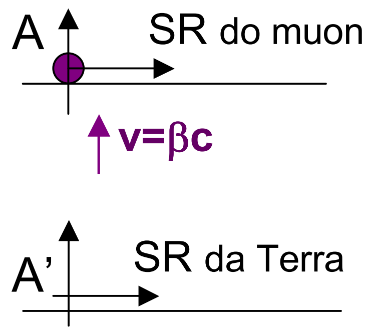
Como **42 Km > 10 Km** ➡os muons atingem de fato a Terra

(2) Contração do comprimento – do SR do muon

No referencial **A** (agora com os muons)

Tempo de vida = τ=2x10^{-6}s
Velocidade da Terra = 0.9999c

Desta forma a distância que a Terra viaja antes que um muon decaia é de 0.6 Km.



Qual é a espessura da atmosfera que o muon ve?

Comprimento próprio da atmosfera = 10Km

O comprimento visto no SR do muon é

$\Delta x = \Delta x'/\gamma = 10\ (1\text{-}0.9999^2)^{1/2}$ = **0.14 Km**

ou seja,

a atmosfera que o muon sente é 70 vezes mais fina (0.6Km > 0.14Km)

➡ desta forma a Terra alcança o muon !!!!!

RELAÇÃO ENTRE ENERGIA E MOMENTUM

APROXIMAÇÃO CLÁSSICA:

A massa não é uma quantidade conservada. Partículas são criadas e destruídas em colisões de alta energia. Em experimentos envolvendo as colisões de partículas de alta energia, observamos que energia cinética pode ser transformada em massa e vice-versa. Neste sentido, massa e energia são intercambiáveis! Nem massa nem energia cinética são quantidades conservadas

Em relatividade o momenta como definido p=mv não se conserva para todos os SRs inerciais.

A fim de preservar a lei da conservação do momenta, sua expressão é redefinida

$p = mv \Rightarrow p = \gamma\, mv$

Podemos ver pq **massa x velocidade** não é conservada examinando-se a expressão clássica de momentum **p=mv**

A expressão **dr/dt** depende do referencial

A expressão **dr/dt’,** onde t’ é o **tempo próprio**, é invariante e $dt' = dt/\gamma$

$dt' < dt$

O intervalo de tempo medido no referencial no qual o “relógio” está em repouso **= proper time**. Em qq outro referencial o intervalo de tempo é maior!

Quando vamos analisar partículas de alta velocidade, vamos ter que modificar as expressões de energia cinética $mv^2/2$, que é inconsistente com o segundo postulado da RE.

Um fóton tem uma v constante =c, energia de massa nula ($mc^2=0$) ➡ $mv^2/2$ p/um fóton é igual à zero, mas um fóton tem energia cinética !

A EXPRESSÃO CLÁSSICA p/ a energia cinética também não funciona para partículas massivas que se movem com v altas. A expressão clássica da energia cinética prevê a violação de uma importante verificação experimental: nenhuma partícula foi observada até então se deslocando com v>c!

EXEMPLO 4.6: Usando a expressão clássica p/a energia cinética, calcule a velocidade de um próton que tem energia cinética de 300 GeV.

- a velocidade do próton seria dada por: $v = (2E_k/m)^{1/2}$

  então: $v/c = (2E_k/mc^2)^{1/2} = (2 \times 300 \text{ GeV} / 0.94 \text{GeV})^{1/2} = 25$ **maior do que c????**

Com uma energia de 300 GeV um próton deve ter 25 x a velocidade da luz, se usarmos a expressão usual da energia cinética!!!

➡O momentum p definido como **mv** é uma quantidade útil na Mecânica Clássica já que é preservada em colisões desde que v<<c.

➡ Para grandes velocidades esta quantidade não é preservada!

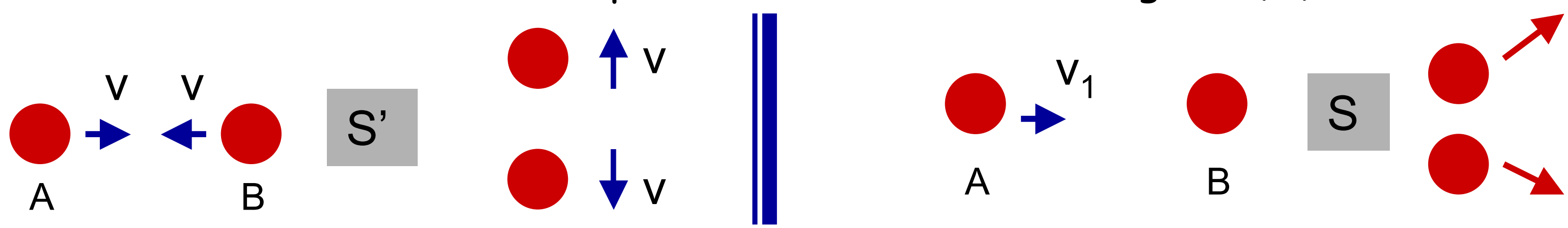
Isto pode ser visto considerando a aceleração de 1 elétron num campo elétrico. A força elétrica provoca um aumento no momentum dado por **$F = dp/dt$**
Se a força atua por um longo tempo, o limite pode crescer indefinidamente. Entretanto, a velocidade não pode ser maior do que c !

➡ O momenta máximo tem que ser mc!

➡ Logo a expressão clássica do momentum não sobrevive quando v é muito grande.

MOMENTA RELATIVITICO

Vamos considerar a colisão elástica de 2 partículas A e B,de massa iguais (m),em dois S's.



No referencial S' as partículas tem momenta de igual magnitude em direções opostas tanto antes como depois da colisão. Seja v a velocidade de cada partícula no referencial S, e seja **$\beta = v/c$ e $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$**

Antes da colisão ambas partículas se deslocam na direção x e depois ambas na direção y

No outro referencial S, a partícula B está em repouso. A velocidade da partícula A antes da colisão, $\mathbf{v_1}$, é dada em termos da transformação das velocidades vista anteriormente:

$$v_1 = dx'/dt' = [dx/dt - v] / [1 - v/c^2\, dx/dt] = (v+v)/(1+v^2/c^2) = 2v/(1+\beta^2)$$

Depois da colisão, a componente x da velocidade de cada partícula em S deve ser igual relativa dos dois referenciais de acordo com a transformação das velocidades: v p/as 2's

VEMOS que o produto da massa e a velocidade não é conservado no referencial S

$$mv_1 \# \; mv + mv$$

Sendo t' é o tempo próprio $dt' = (1 - v^2/c^2)^{1/2} dt = dt/\gamma$

Definimos o **momento relativístico** como sendo:

$$p = m\, dr/dt' = m(dr/dt)(dt/dt') = \gamma mv$$
$$p = mv/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

$p = \gamma mv$ onde gama é definido em termos da velocidade da partícula no referencial onde está sendo calculado o momentum

Será que neste referencial o momenta vai ser conservado?

-Calculo do fator γ_1 da partícula A antes da colisão a partir da velocidade $v_1 = 2v/(1+\beta^2)$

$$\gamma_1 = 1/\,(1 - v_1^2/c^2)^{1/2} = 1/(1 - (2v)^2/c^2(1+\beta^2)^2)^{1/2} = 1/(1 - 4v^2/c^2(1+\beta^2)^2)^{1/2} = (1+\beta^2)/(1-\beta^2)$$

O momenta total **antes** da colisão é, portanto, igual a:

$$p_1^{tot} = \gamma_1 m v_1 = (1+\beta^2)/(1-\beta^2).m.2v/(1+\beta^2) = 2mv/(1-\beta^2)$$

A magnitude das componentes y das veloc. de c/partícula depois da colisão:
NO SR S, EM Y, DEPOIS :

$$dy'/dt' = (dy/dt)/\,[\gamma(1 - \cancel{v}/c^2\, dx/dt)] = v/\,\gamma = v(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

A VELOCIDADE **TOTAL DEPOIS** DA COLISÃO NO SR **S**: $v_2 = [v^2 + v^2(1 - v^2/c^2)]^{1/2}$

$$v_2 = [v^2+v^2 - v^2\beta^2)]^{1/2} = v(2-\beta^2)^{1/2} = c\beta(2-\beta^2)^{1/2}$$

O fator γ p/cada partícula **DEPOIS** da colisão, a partir de v_2 é dado por:

$$\gamma_2 = 1/(1-v_2^2/c^2)^{1/2} = 1/(1-(v^2/c^2)(2-\beta^2))^{1/2} = 1/(1-2\beta^2+\beta^4)^{1/2}$$

$$\gamma_2 = 1/(1-\beta^2)$$

Desta forma, o momentum total **DEPOIS** da colisão é:

$$P_2^{tot} = \gamma_2 mv + \gamma_2 mv = 2mv/(1-\beta^2)$$

(a componente y se anula)

➡ $p_1^{tot} = p_2^{tot}$ **O momentum foi conservado.**

$$\boxed{P = \gamma mv = mv/(1-v^2/c^2)^{1/2}}$$

MOMENTUM DE UMA PARTICULA DE MASSA NAO NULA

Energia na Teoria da Relatividade Especial STR: Derivacão $E = mc^2$

"GEDANKEN EXPERIMENT" de Einstein

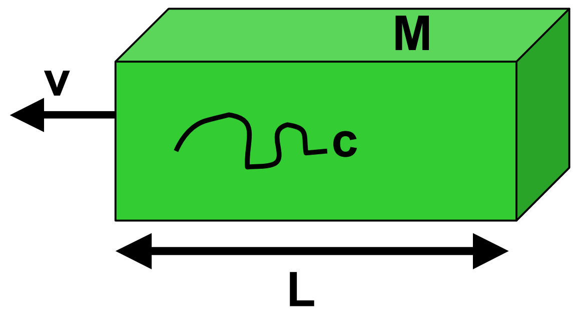
Imagine uma caixa fechada de massa **M** e comprimento **L**, inicialmente em repouso. Um feixe de luz é emitido de uma das extremidades da caixa.

Sabemos da Mecânica que objetos que se movem carregam tanto energia quanto momentum. Isto também é verdade para ondas eletromagnéticas.

Maxwell mostrou que a energia **E** e momentum **p** de uma onda estão relacionados por **$p = E/c$** .

Como a onda eletromagnética emitida carrega momentum **E/c**, a caixa deve recuar para que o momentum se conserve.
A velocidade de recuo é **v**, que se supõe $v \ll c$, já que a caixa é um corpo massivo.
CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM: **$E/c = Mv$**

A luz se moverá ao longo da extensão da caixa num tempo **$\Delta t = L/c$** (de novo estamos supondo que **$v \ll c$**, de forma que a distância viajada pela luz = L).



Durante Δt a caixa se moverá uma distância muito pequena **Δx** dado por
$\Delta x = v\,\Delta t = (E/Mc)\,(L/c) = EL/Mc^2$

Uma vez que a luz alcança o fim da caixa, ela transfere seu momentum para a caixa e faz a caixa parar.

A caixa agora está numa nova posição. Seu centro de massa parece ter sido movido, mas a caixa é um sistema isolado cujo CM não pode se mover!

Para lidar com esta contradição, Einstein supôs que a luz transporta massa (assim como energia e momentum):

Se m = massa transportada pela luz, então: **$mL = M\Delta x$**

de forma a garantir que o CM da caixa + luz, não se mova.

Usando a expressão para **Δx** e resolvendo-a para m:

$$m = M\Delta x/L = MEL/(Mc^2L) = E/c^2 \qquad E = mc^2$$

onde E = energia da luz, usualmente escrita como E_o para denotar que é uma energia de repouso e m = massa equivalente da luz.

Embora esta expressão tenha sido obtida para a energia da OE (luz), ela é a expressão universal da equivalência entre massa e energia.
Ela tb pode ser obtida da definição da energia cinética de um corpo em movimento.
Já que massa e energia não são quantidades independentes, os princípios de conservação separados de energia e massa são adequadamente combinados no **princípio de conservação massa-energia.**